

УДК 532.546.06

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ДРЕНАЖЕМ

В.Н. Эмих

Аннотация

Излагаются и иллюстрируются численными расчётами разработанные автором подходы к исследованию структуры и закономерностей фильтрационных течений к горизонтальным дренам с одной или двумя неизвестными подвижными границами потока. Математическими моделями таких течений являются не изученные ранее двумерные многопараметрические краевые задачи теории аналитических функций.

Ключевые слова: горизонтальный дренаж, локальная депрессия, свободная поверхность, поверхность раздела, критический режим, параметры отображения, гидродинамическая сетка.

Введение

В основополагающей для современной теории фильтрации работе Н.Е. Жуковского [1], содержащей вывод дифференциальных уравнений движения грунтовых вод, методом источников и стоков решена задача о притоке к трубчатому водозабору, заложенному под рекой. Предложенная схематизация водозабора точечным стоком вошла в литературу наряду с представлением дрен посредством линейного стока, также принадлежащим Н.Е. Жуковскому [2].

В дренируемых потоках с подвижными границами последние находятся под воздействием дренажа и, со своей стороны, ограничивают его активизацию. Определяемая таким взаимовлиянием специфика указанных течений потребовала формирования принципиально новых подходов к их математическому моделированию на базе неизученных ранее многопараметрических краевых задач теории аналитических функций. Результаты таких разработок представлены в настоящей статье.

1. Локальная депрессия и критический режим дренирования

Начатые автором в 70-х годах прошлого столетия исследования фильтрационных течений с дренажём первоначально ориентировались на проблему рационализации промывок засоленных почв. Предметом исследований стала фильтрация в почвенном слое с водоупором промывных вод, поступающих из периодически расположенных на поверхности источников к заложенным посредине между ними горизонтальным дренам. При моделировании течения на электропроводной бумаге обнаружилось, что на фоне общего понижения свободной поверхности грунтовых вод, создаваемого дренами, непосредственно над ними может образовываться дополнительная, *локальная депрессия*; при этом кривая депрессии имеет две точки перегиба, ограничивающие на ней участок выпуклости (рис. 1). Эта особенность формы кривой наблюдалась и при моделировании фильтрации с дренажём в щелевом лотке.

При первом анализе течения, выполненном в терминах параметров конформного отображения [3], наметилась роль дренажа как основного фактора формирования локальной депрессии. В таком контексте приобрело значение замечание

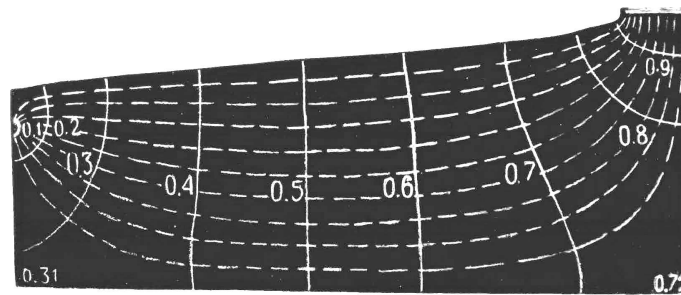


Рис. 1. Электроаналог потока к дренажу в почвенном слое с водоупором

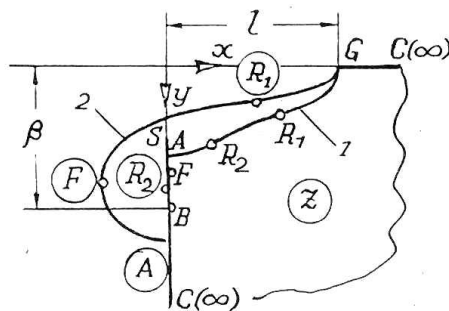


Рис. 2. Область фильтрации к дренажному стоку в пласте неограниченной глубины и протяжённости

В.В. Ведерникова [4, с. 54–55], отметившего предельный, *критический режим*, при котором над дренажем образуется точка заострения кривой депрессии. Ниже неё давление отрицательно, и его дополнительное, сколь угодно малое понижение должно привести к прорыву в дренаж воздуха.

В 30-х годах XX в. дренажи на ирригационных объектах действовали в режиме свободного истечения, при котором давление во всём потоке превышает атмосферное. В этих условиях содержащееся в [4] описание критического режима фильтрации с дренажом, сыгравшее в дальнейшем ключевую роль при исследовании таких течений, опередило время и не получило развития; сам В.В. Ведерников к этому вопросу также не возвращался.

С появлением систем вакуумного мелиоративного дренажа [5] и горизонтальных водозаборов становится актуальным изучение течений в режиме вакуумирования. Для углублённого исследования локальной депрессии была рассмотрена [6] фильтрация с поверхности, затопленной всюду, кроме полосы шириной $2l$, к точечному стоку, действующему с расходом $2Q$, в неограниченном по глубине и простиранию пласте под средней линией полосы на глубине d от поверхности. Правая половина области фильтрации, симметричная левой, представлена на рис. 2; кривая депрессии отмечена цифрой 1.

В рамках соответствующей краевой задачи установлено, что при $l \geq \sqrt{8d}$ локальная депрессия, ограниченная справа точкой перегиба R_1 , формируется при сколь угодно малых значениях Q , иначе она появляется по достижении расхода некоторого значения. В обоих случаях с увеличением расхода впадина над дренажем углубляется, а заключённый в её пределах участок AR_2 выполаживания кривой депрессии сокращается. При определённом, максимально достижимом значении расхода Q_* точка R_2 совмещается с точкой A ; последняя превращается

при этом в точку заострения депрессионной кривой. Возникает отмеченный В.В. Ведерниковым критический режим, на котором исчерпывает себя исходная схема течения.

За её рамками решение краевой задачи, продолженное по одному из параметров конформного отображения, описывает односторонний приток к дренажному стоку B , расположенному на поверхности вертикальной завесы, через вершину которой S часть потока перетекает в полуплоскость $x < 0$, а затем также поглощается стоком. Кривая депрессии трансформированного течения отмечена на рис. 2 цифрой 2, а подвижные особые точки, перешедшие в эту схему из первоначальной, обозначены теми же буквами в кружочках.

Анализу подобных трансформаций, присущих многопараметрическим краевым задачам с подвижными границами, посвящена отдельная глава книги [7]. Некоторые из течений, происходящие за рамками исходных фильтрационных схем, сохраняют с ними лишь отдалённое сходство. Их привлекательность с исследовательской точки зрения отчасти обесценивается тем, что все трансформированные схемы также являются критическими, гидродинамически неустойчивыми и в силу этого нереализуемыми. Образно говоря, они сохраняют лишь оболочку физического содержания, наполнить которую можно только, расширив постановку краевой задачи. Примером такого расширения описанной выше «закритической» схемы притока к дренажному стоку является задача о фильтрации грунтовых вод через вертикальную завесу с частичным перехватом потока дренажной, расположенной на поверхности завесы [8].

Таким образом, критический режим определяет рамки реализации течения в описывающей его краевой задаче. Устанавливая вместе с тем интервал допустимых значений фильтрационного расхода дренажной, он подлежит первоочередному расчёту при решении задачи в прямой постановке, являющейся единственной основой полноценного исследования течений.

Изложим некоторые результаты такого исследования, выполненного на базе краевой задачи фильтрации в почвенном слое, под которым находится сильнопроницаемый водоносный горизонт, при совместном действии четырёх факторов: поступление воды в почву из равноудалённых поверхностных источников одинаковой ширины, их отток в равнодебитные трубчатые дренажи, заложенные на одинаковой глубине посредине между источниками, гидравлическая взаимосвязь почвенного слоя с подстилающим его пластом, напор в котором постоянен, и равномерная по протяжённости инфильтрация на свободную поверхность или испарение с неё [9]. Что касается подпочвенного горизонта, то именно его присутствие определяет специфику таких течений с их разветвлённостью на потоки различных направлений в разнообразных вариантах. Сильнопроницаемый водоносный пласт является потенциально более мощным дренирующим фактором, чем горизонтальный дренаж, который может быть выведен из действия при понижении напора в нижележащем горизонте. На таком понижении, создающем нисходящий поток поверхностных вод сквозь почвенный слой, основан вертикальный дренаж сельскохозяйственных земель, используемый в регионах орошаемого земледелия. В других случаях могут преобладать восходящие токи подземных вод. При их испарении со свободной поверхности фильтрационного потока растворённые в них соли накапливаются в почве. С учётом сказанного детальное изучение структуры описанных течений имеет важное значение для понимания процессов, происходящих в почвогрунтах, и планирования мероприятий по их мелиорации.

На рис. 3 представлены результаты расчётов двух вариантов течения в почвенном слое мощности T , к которой отнесены линейные параметры области фильтрации: расстояние $2L = 5$ между соседними дренажными стоками, глубина $\beta = 0.4$

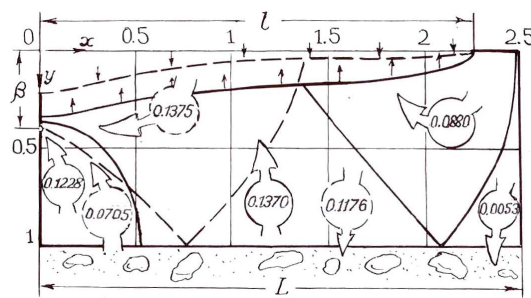


Рис. 3. Структура потока в дренируемом почвенном слое с нижележащим сильнопроницаемым водоносным горизонтом

их заложения, ширина $2(L-l) = 0.5$ поверхностных источников, напор $H = -0.1$ в нижележащем горизонте, отсчитываемый от поверхности почвы, напор $H_d = -0.38$ на контуре трубчатой дрены радиуса $r = 0.125$. К параметрам, определяющим течение, принадлежат также интенсивность инфильтрации $\varepsilon = 0.1$ в первом или испарения $\varepsilon = -0.1$ во втором варианте. Обе эти величины, как и приведённые на рис. 3 расходы составляющих потоков, отнесены к κT , где κ – коэффициент фильтрации почвенного слоя. Несколько завышенные по сравнению с реальными значения интенсивностей инфильтрации и испарения, принятые при расчётах, позволяют отчётливо проследить за воздействием этих факторов на структуру течения.

В варианте с испарением (см. сплошные линии тока и значения расходов в кружках со сплошными контурами на рис. 3) весь дренажный сток образуют подземные воды. Другая часть притока из нижележащего горизонта проходит сквозь почвенный слой испаряясь; на испарение расходуется также часть поступления из поверхностного источника. Во втором варианте (штриховые линии тока и контуры кружков) инфильтрационные воды дренируются и частично фильтруются, как и поверхностные воды, сквозь почвенный слой в подстилающий его горизонт. Из представленных на рис. 3 деталей вычислены фильтрационные расходы потоков, составляющих течения, и координаты граничных точек разделения этих потоков; внутри же области течения разделяющие линии тока нанесены ориентировочно.

В краевых задачах фильтрации к горизонтальным трубчатым дренам последние моделируются точечными стоками. Их гидродинамической характеристикой является расход Q , содержащийся во всех аналитических зависимостях, получаемых при решении задач. Однако сама эта величина определяется напором на поверхности дрен, который к тому же менее, чем дренажный расход, чувствителен к изменению других физических параметров, определяющих течение. Целесообразно поэтому в качестве входного параметра дренажа задавать, как в описанном выше примере расчётов, напор на дренах; их расход оказывается при этом одной из вычисляемых характеристик течения.

В варианте с испарением увеличению расхода дрен от 0 до максимально возможного (в критическом режиме) значения 0.1294 сопутствует понижение напора на дренах от -0.1584 до -0.3966 . В балансе течения испарение является основным расходным фактором: суммарная его величина составляет 0.2250. Заданный напор на дренах $H_d = -0.38$ и соответствующий ему дренажный расход $Q = 0.1228$ близки к критическим значениям этих величин. Во втором варианте основная часть поступления воды в почву связана с инфильтрацией той же суммарной интенсивности 0.2250. Значительно расширяются возможности горизонтального дренажа: понижение напора на дренах и их фильтрационный расход изменяются в интервалах

$(-0.03875, -0.4493)$ и $(0, 0.2441)$ соответственно. Заметим, что если уровень грунтовых вод понижается за счёт испарения и при отсутствии дренирования, то в той же ситуации инфильтрация интенсивности 0.1 полностью компенсирует понижение напора -0.1 в нижележащем горизонте, и в почвенном слое, насыщенном водой до поверхности, происходит одномерная нисходящая фильтрация со скоростью 0.1, определяемой инфильтрацией. При этом напор изменяется с глубиной линейно, а поверхностные источники испытывают наибольший подпор со стороны инфильтрационных вод. Расход из такого источника в пределах области фильтрации возрастает от 0.0250 до 0.0308 при увеличении интенсивности дренажа во всём интервале $(0, 0.2441)$ его возможных значений. Испарение же оказывает противоположное, активизирующее воздействие на фильтрацию из источников, фактически изолируя от них горизонтальные дренажи: с увеличением расхода Q в интервале $(0, 0.1228)$ его возможных значений расход из источника, представленного на рис. 3, незначительно возрастает в интервале $(0.0921, 0.0934)$.

2. Стратифицированные фильтрационные течения

Исследования по фильтрации жидкостей различной плотности, начатые на рубеже XIX и XX вв., проводились в последующие десятилетия исключительно в рамках так называемых гидравлических, одномерных схем. Первая двумерная схема течения пресных грунтовых вод над солёными была представлена в работе [10]. Начатые в 60-х годах автором и Ю.И. Капрановым под руководством П.Я. Кочинной исследования по фильтрации стратифицированных жидкостей привели к созданию обширного комплекса математических моделей таких течений.

Центральное место в этом комплексе занимают краевые задачи фильтрации с дренажем в кайме пресных вод, образующейся над солёными грунтовыми водами за счёт притока из поверхностных источников или инфильтрации. Специфика задач этого сложного и малоизученного раздела подземной гидродинамики связана с наличием двух неизвестных подвижных границ каймы: свободной поверхности и поверхности раздела между пресными и солёными водами. Обе границы подвержены воздействию дренажа, активизация которого приводит к проникновению в дренаж воздуха или солёных вод. В связи с этим необходимо вначале рассчитать тот из двух возможных критических режимов, при котором произойдёт дестабилизация течения. Вопрос заключается в том, каким окажется этот режим при тех или иных входных параметрах исследуемого течения.

Ключом к разрешению дилеммы стал *двойной критический режим*, выявленный в работе [11] и подлежащий первоочередному расчёту. Он состоит в том, что при некоторой, устанавливаемой численно глубине дренажного стока по достижении им определённой и также вычисляемой интенсивности критические режимы течения возникают одновременно на обеих подвижных границах. Их точки, расположенные на одной вертикали с дренажным стоком, становятся точками заострения своих границ, а интенсивность дренирования оказывается максимально достижимой. В зависимости от того, заложена дрена выше или ниже её положения в двойном критическом режиме, интервал допустимых значений её расхода рассчитывается в *простом критическом режиме*, связанном соответственно со свободной поверхностью или с поверхностью раздела. Далее течение можно исследовать в *нормальном режиме дренирования* при любом возможном значении расхода дренажного стока.

Проиллюстрируем изложенный подход на задаче об инфильтрационной кайме пресных вод плотности ρ_1 , сформировавшейся над солёными грунтовыми водами плотности ρ_2 [12]. Равномерно распределённая по поверхности инфильтрация заданной интенсивности ε компенсируется оттоком в равнодебитные и равноудалённые

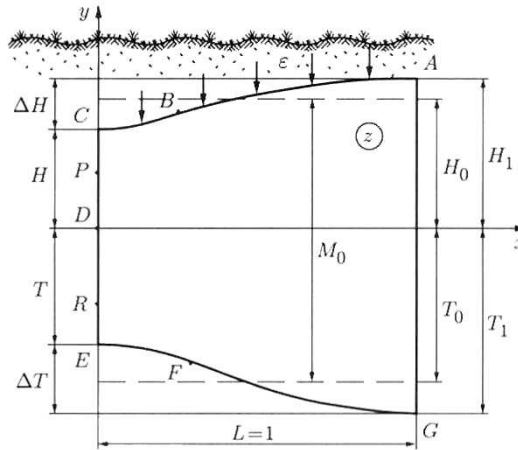


Рис. 4. Область фильтрации в инфильтрационной кайме пресных вод

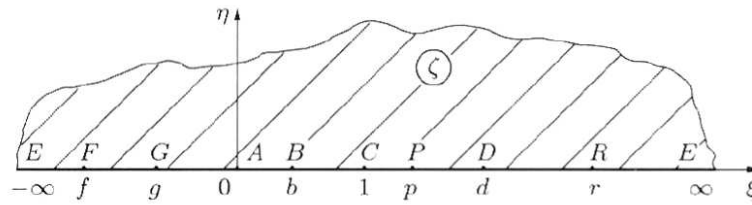


Рис. 5. Полу плоскость вспомогательной комплексной переменной

ные дренажные точечные стоки, расположенные на одинаковой глубине, вследствие чего в процессе формирования каймы сохраняется объём содержащихся в них пресных вод. Неизменным остаётся также объём солёных вод, изолированных от внешних источников и стоков. Периодичность течения позволяет ограничить его изучением в пределах одного из полупериодов, представленного на рис. 4.

С использованием метода П.Я. Полубариновой-Кочиной [13], основанного на аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, в работе [11] получены следующие зависимости, связывающие комплексный потенциал течения ω и комплексную координату z точек области течения с параметрической переменной ζ (рис. 5):

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = -2c_1 \frac{F_1(\zeta)}{d-\zeta} \lambda(\zeta), \quad \frac{dz}{d\zeta} = i c_1 \frac{F_2(\zeta)}{d-\zeta} \lambda(\zeta), \quad \lambda(\zeta) = \sqrt{\frac{(\zeta-p)(\zeta-r)}{(\zeta-g)\zeta(\zeta-1)}}, \quad (1)$$

$$F_1(\zeta) = \sigma U - 1/U, \quad F_2(\zeta) = \alpha U + \beta/U, \quad U = \exp[W(\zeta)/2], \quad c_1 > 0.$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\varepsilon + \rho} + \sqrt{\varepsilon(1 + \rho)}}{\sqrt{\varepsilon + \rho} - \sqrt{\varepsilon(1 + \rho)}}, \quad \alpha = \frac{\sigma - 1}{\varepsilon} + \sigma + 1, \quad \beta = \frac{\sigma - 1}{\varepsilon} - \sigma - 1.$$

Функция $W(\zeta)$, используемая при построении решения и связанная с комплексной скоростью фильтрации w [13], определяется равенствами

$$W(\zeta) = \ln \frac{2i + \beta w}{2i\sigma - \alpha w} = i c_0 \int_0^\zeta \Phi(u) du \quad (c_0 > 0),$$

где

$$\Phi(u) = \frac{(b-u)(u-f)}{(p-u)(r-u)} \Phi_0(u), \quad \Phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{(u-g)u(1-u)}},$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\varepsilon+\rho} + \sqrt{\varepsilon(1+\rho)}}{\sqrt{\varepsilon+\rho} - \sqrt{\varepsilon(1+\rho)}}, \quad \alpha = \frac{\sigma-1}{\varepsilon} + \sigma + 1, \quad \beta = \frac{\sigma-1}{\varepsilon} - \sigma - 1,$$

$$\rho = (\rho_2 - \rho_1)/\rho_1.$$

Для функции $\lambda(\zeta)$, содержащейся в (1), выбирается ветвь, положительная при $\zeta > r$. Величины, связанные с функциями z и ω , отнесены соответственно к L и κL (κ – коэффициент фильтрации грунта).

Узловым этапом на пути реализации прямой постановки многопараметрических краевых задач фильтрации является нахождение неизвестных параметров конформных отображений из уравнений, посредством которых упомянутые параметры связываются с известными геометрическими элементами областей, используемых при построении решения. В приведенных выше представлениях функций $z(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ искомыми являются, наряду с постоянными множителями c_0 и c_1 , аффиксы b, d, g, f, p, r особых точек области фильтрации (см. рис. 4, 5).

В этой фактически самостоятельной задаче выделена внутренняя подзадача, которая сводится к определению параметров c_0, b, d, f, p при заданных параметрах g, r из системы уравнений, составленной с использованием области W . В [12] разработан и обоснован аналитически алгоритм решения этой системы. Параметры g и r подчинены при этом некоторым условиям, которые оказываются следствиями ограничений на интенсивность дренирования; последние же устанавливаются на начальном этапе исследования при расчёте соответствующего критического режима течения в рамках описанной выше процедуры. Далее с использованием балансовых соотношений для постоянной c_1 получено следующее выражение:

$$c_1 = \frac{\varepsilon \sqrt{\alpha \beta}}{2\pi(\beta\sigma + \alpha)} \sqrt{\frac{(d-g)d(d-1)}{(d-p)(r-d)}}.$$

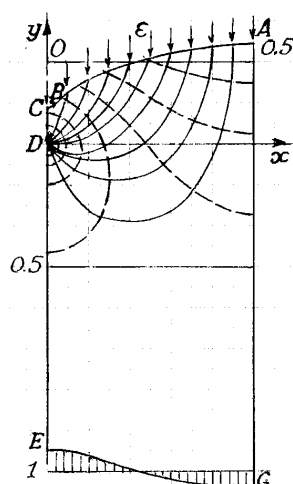
Относительно параметров g, r составлена система уравнений

$$-\int_0^1 y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = H_0, \quad -\int_{-\infty}^g y(\zeta) \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} d\zeta = T_0, \quad (2)$$

левые части которых – объёмы пресных вод выше и ниже уровня дрен в сформировавшейся кайме, а правые – до включения дрен (см. рис. 4). Равенства (2) основаны на отмеченной выше предпосылке о сохранении указанных объёмов в процессе формирования каймы.

Первое уравнение в (2) содержит координаты точек кривой депрессии AC , второе – координаты точек линии раздела EG . Параметрические уравнения обеих подвижных границ каймы получаются из второй зависимости в (1), записанной на соответствующих участках действительной оси плоскости ζ . Не приводя уравнений (2) в развёрнутой записи ввиду её сложности, изложим вкратце вычислительный алгоритм, реализованный в компьютерных программах и включающий в себя нахождение неизвестных параметров отображения при заданных физических параметрах с последующим расчётом характеристик течения в кайме.

Все расчётные зависимости преобразованы к переменным, связанным определённым образом с искомыми параметрами. В частности, для параметров g и r

Рис. 6. Гидродинамическая сетка течения в кайме при $L = 0.5$

такая замена произведена посредством равенств

$$k = \sqrt{\frac{-g}{1-g}}, \quad s = \sqrt{\frac{1-g}{r-g}}.$$

Получаемые при этом формулы содержат эллиптические интегралы и функции при модулях k и $k' = \sqrt{1-k^2}$.

В запрограммированном вычислительном алгоритме параметры k и s определяются в общем случае из следующей системы уравнений, равносильной системе (2):

$$G_1(k) = g_1[k, s(k)] = M_0, \quad G_2(s) = g_2(k, s) = H_0. \quad (3)$$

Величина $M_0 = H_0 + T_0$ выражает объём пресных вод в кайме; сохранение его неизменным обусловлено выше, при постановке задачи.

Система (3) решается посредством двухступенчатой итерационной процедуры. В её внутреннем цикле из второго уравнения системы определяется параметр s при фиксированном значении параметра k , который вычисляется во внешнем цикле из первого уравнения. Оба искомых параметра варьируются в интервалах своих допустимых значений; границы интервалов устанавливаются предварительно при расчёте критических режимов дренирования по описанной выше схеме. Все аспекты, касающиеся обоснования разрешимости системы (3) и всего вычислительного алгоритма, подробно изложены в работе [12].

Приведём результаты расчётов течения в кайме при двух расстояниях между соседними дренами. Поскольку эта величина варьируется, все геометрические характеристики отнесены в данном случае к средней толщине M_0 каймы пресных вод (см. рис. 4). В первом расчётном варианте принято $L = 0.5$, во втором варианте $L = 2$. Различна также интенсивность инфильтрации ε ; соображения, определяющие выбор этого параметра, будут пояснены по ходу изложения. Остальные входные параметры зафиксированы в обоих вариантах при значениях $\rho = 0.2$, $H_0 = 0.2$.

При $L = 0.5$ в двойном критическом режиме вычислено $\varepsilon_{**} = 0.5509$, $H_* = H_0(\varepsilon_{**}) = 0.2734$. Так как $H_0 < H_*$, то при выбранной глубине дренажного стока простой критический режим возникнет на кривой депрессии при $\varepsilon = \varepsilon_* = 0.3790$. При расчётах течения в нормальном режиме дренирования принято $\varepsilon = 0.3750$;

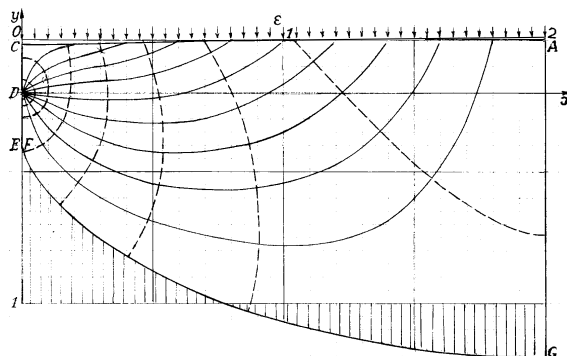


Рис. 7. Гидродинамическая сетка течения в кайме при $L = 2$

область фильтрации для этого случая представлена на рис. 6. Приближение интенсивности дренажа к максимально допустимой позволяет отчётливее выявить воздействие дренирования потока на его подвижные границы и фильтрационные характеристики течения. Одним из признаков близости расчётного режима течения к критическому является сближение точки перегиба B кривой депрессии с её нижней точкой C : при выбранном значении ε получено $x_B = 0.0159$, $y_B = 0.0976$; $x_C = 0$, $y_C = 0.0857$.

Во втором варианте $\varepsilon_{**} = 0.009297$, $H_* = 0.0534$, и теперь по мере интенсификации дренажного стока критическая ситуация возникает на линии раздела при $\varepsilon_* = 0.008352$. Течение, представленное на рис. 7, рассчитано при $\varepsilon = 0.008350$ на грани дестабилизации линии раздела, точка перегиба которой F с координатами $x = 0.0019$, $y = -0.2105$ близка к наивысшей точке границы E с ординатой $y = -0.2049$.

Характер течения наглядно иллюстрирует его гидродинамическая сетка. В первом расчётном варианте при относительно частом дренаже двумерная структура потока проявляется в пределах всей области фильтрации; во втором случае течение приобретает преимущественно горизонтальную ориентацию. При четырёхкратном увеличении междренного расстояния линия раздела в большей степени, чем в первом варианте, подвержена воздействию дренажа, дестабилизируясь уже при его незначительном возрастании. Расчёты сетки производились в терминах приведённых потенциала и функции тока. Первая из этих величин, отсчитываемая от нулевого значения в наивысшей точке каймы A , отнесена к значению потенциала в точке с координатами $(0, 0.005)$, условно принятой за верхнюю точку контура дрены. Масштабом приведения функции тока, равной нулю на участке границы CD (см. рис. 4), является её максимальное значение εL на участке $AGED$. Изолинии сетки для обеих функций рассчитаны с шагом 0.1.

В комплекс моделей стратифицированных течений входят также задачи притока нефти к горизонтальным скважинам в пластах, содержащих жидкости с иными физическими свойствами или газ [14, 15]. При исследовании таких течений основное внимание уделяется критическим режимам откачки, обеспечивающим максимальную нефтедобычу без примесей. В рамках указанных режимов возможен расчёт недоступных для измерения объёмов посторонних жидкостей с использованием аналитических зависимостей, получаемых при решении краевых задач.

3. Вычислительные операции

При моделировании фильтрационных течений на базе многопараметрических краевых задач наряду с методами теоретического анализа большое значение

на всех стадиях моделирования приобретают численные расчёты, выполняемые по стандартным программам и алгоритмам, разрабатываемым применительно к конкретным задачам.

Наиболее трудоёмкие вычислительные операции связаны с нахождением параметров конформных отображений из систем трансцендентных уравнений посредством циклических итерационных процедур.

В некоторых случаях при подготовке системы к расчётам часть искомых параметров удаётся выразить через остальные, уменьшив тем самым число параметров, подлежащих нахождению при последующем численном решении уравнений, количество которых также уменьшается. Далее в системе выбирается уравнение, решаемое во внешнем цикле относительно некоторого параметра, сложной функцией которого представляется выражение, входящее в это уравнение. В описанной выше задаче о дренаже в инфильтрационной кайме пресных вод [12] такая роль отведена второму уравнению системы (3). В процедуру его решения вложен внутренний цикл, в котором решается первое уравнение системы. В процессе решения для каждой фиксируемой пары параметров (k, s) остальные пять подлежащих нахождению параметров вычисляются по алгоритму, вложенному в алгоритм решения системы (3).

Каждый из искомых параметров связывается при решении системы с одним из её уравнений вида $F(\mu) = 0$. Однозначная разрешимость уравнения обеспечивается устанавливаемой аналитически или численно монотонностью функции $F(\mu)$ и различием её знаков на концах интервала изменения искомого параметра μ . Интервалы допустимых значений параметров определяются в результате предварительного расчёта предельных режимов течения.

Для решения уравнений разработана процедура, состоящая из нескольких этапов. Вначале последовательным делением исходного интервала, содержащего искомый параметр, выделяется сокращённый интервал, на концах которого функция $F(\mu)$ имеет разные знаки. Нахождение параметра с предписанной точностью осуществляется затем в итерационном цикле, состоящей из линейной и серии квадратных интерполяций.

Для вычисления содержащихся в расчётных формулах эллиптических интегралов и функций используются экономичные алгоритмы, изложенные в работах [16]. Получаемые зависимости содержат также несобственные интегралы, среди которых преобладают интегралы вида

$$I = \int_a^b f(u) du / \sqrt{(u-a)(b-u)}$$

с функцией $f(u)$, непрерывной в промежутке интегрирования $[a, b]$. Особенности подынтегральной функции на обоих концах промежутка устраняются одновременно посредством замены $u = a + (b-a)v^2(2-v)^2$, в результате которой получим

$$I = 4 \int_0^1 f[u(v)] dv / \sqrt{2-v^2}.$$

Интегралы по бесконечному промежутку $[d, \infty)$ преобразуются заменой $u = d/[v^2(2-v^2)]$, переводящей исходный промежуток интегрирования в тот же, что и для прочих несобственных интегралов, промежутков $[0, 1]$. Такая унификация избавляет от необходимости переписывания пределов интегрирования для каждого очередного интеграла, что значительно ускоряет расчёты при поистине калейдоскопическом чередовании вычисляемых интегралов.

Собственно интегрирование производится по стандартной программе, основанной на формуле Симпсона. Но эффективность, а подчас и сама возможность выполнения программы с требуемой точностью определяются поведением подынтегральных функций. Их относительно быстрое изменение происходит, как правило, вблизи концов промежутка интегрирования, хотя оно существенно сглаживается в результате вышеуказанных замен переменной. С учётом этого исходный промежуток интегрирования разбивается на частичные промежутки с их сокращением по мере приближения к конечным точкам. Такая «настройка» также ускоряет вычисления.

Для расчёта гидродинамической сетки в задаче об инфильтрационной кайме разработана отдельная программа, при выполнении которой осуществляется обширный комплекс весьма трудоёмких вычислительных операций. Для каждого подлежащего нахождению узла сетки с заданным в ней значением $\omega_0 = \varphi_0 + i\psi_0$ комплексного потенциала вычисление комплексной координаты $z_0 = x_0 + iy_0$ из первого уравнения в (3) связано с реализацией зависимости $\zeta(\omega)$, получаемой в результате обращения второго уравнения. Именно с этой операцией связаны сложности всего алгоритма расчёта координат сетки.

Точность вычислений контролируется посредством соотношений, фиксирующих замкнутость границы области фильтрации и баланс физических характеристик течения. В разработанных алгоритмах относительная погрешность расчётов исчисляется величинами порядка $10^{-4} - 10^{-6}$.

Заключение

Исходным этапом решения задач фильтрации является нахождение комплексного потенциала моделируемых течений как аналитической функции комплексной координаты точек области фильтрации. На базе получаемой при этом зависимости $\omega(z)$ выводятся формулы для расчёта характеристик течения, определяющих его структуру и закономерности.

В задачах, относящихся к начальному периоду развития теории двумерных фильтрационных течений, аналитические зависимости, получаемые при решении задач, оказывались доступными для расчётов даже при ограниченных возможностях имевшихся в то время вычислительных устройств.

В дальнейшем всё большую актуальность приобретает исследование течений с горизонтальным дренажем и фильтрации жидкостей различной плотности в рамках многопараметрических краевых задач. Последние оказались тем рубежом, преодоление которого потребовало принципиально новых подходов, основанных на углублённом теоретическом анализе в сочетании с трудоёмкими вычислительными операциями. Наибольшие сложности связаны с нахождением неизвестных параметров отображения. В результате решения этой задачи фильтрационная модель становится управляемой: прямой расчёт характеристик течения открывает возможность детального анализа структуры и трансформаций течения в непосредственной зависимости от каждого из определяющих его параметров.

Специфичными для фильтрации к горизонтальным дренам в областях с подвижными границами являются критические режимы дренирования, определяющие рамки реализации исследуемых течений в моделирующих эти течения краевых задачах. При расчёте таких режимов устанавливаются интервалы допустимых значений фильтрационного расхода дрены, подлежащего заданию наряду с другими определяющими параметрами. Предельные режимы дренирования используются для решения некоторых проблем водоснабжения и гидромелиорации; примеры приложений такого рода содержатся в работах [11, 12]. Как отмечалось выше, в задачах фильтрации нефти к горизонтальным скважинам обращение аналити-

ческих зависимостей, связывающих глубину скважин и их дебит в критическом режиме откачки с физическими величинами, определяющими течение, позволяет найти отдельные из таких недоступных для измерения величин, если зафиксировать техническими средствами вышеназванные параметры скважин в критическом режиме.

Summary

V.N. Emikh. Structural Analysis of Filtration Flows with Horizontal Drainage.

The author's approaches to investigation of structure and behavioral patterns of filtration flows towards horizontal drains with one or two unknown mobile flow boundaries are expounded and illustrated by numerical computations. Mathematical models of such flows are represented by yet unexplored two-dimensional multiparametric boundary-value problems of the analytical function theory.

Key words: horizontal drainage, local depression, free surface, separating surface, critical conditions, mapping parameters, hydrodynamical net.

Литература

1. Жуковский Н.Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод // Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений: в 10 т. – М.: Гостехтеориздат, 1949. – Т. 3. – С. 184–206.
2. Жуковский Н. Е. Просачивание воды через плотины // Жуковский Н.Е. Полное собрание сочинений: в 10 т. – М.: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 7. – С. 297–332.
3. Эмих В.Н. Решение задачи о плоской установившейся фильтрации при дренажных промывках почв с непроницаемым основанием // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 220, № 6. – С. 1289–1292.
4. Ведерников В.В. Теория фильтрации и ее применение в области ирригации и дренажа. – М.; Л.: Госстройиздат, 1939. – 247 с.
5. Дегтярев Б.М., Калантаев В.А. Вакуумный дренаж на орошаемых землях. – М.: Колос, 1978. – 94 с.
6. Эмих В.Н. О нескольких гидродинамических моделях дренажа // Прикл. матем. и механика. – 1979. – Т. 43, Вып. 6. – С. 1046–1057.
7. Эмих В.Н. Гидродинамика фильтрационных течений с дренажем. – Новосибирск: Наука, 1993. – 213 с.
8. Эмих В.Н. Дренаж в потоке грунтовых вод через завесу // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – Т. 43, № 4. – С. 106–114.
9. Эмих В.Н. Анализ двумерной установившейся фильтрации в почвенном слое с сильнонепроницаемым основанием // Прикл. матем. и механика. – 1982. – Т. 46, Вып. 5. – С. 857–868.
10. Полубаринова-Кочина П.Я. О линзе пресной воды над соленой водой // Прикл. матем. и механика. – 1956. – Т. 20, Вып. 3. – С. 418–420.
11. Эмих В.Н. Краевая задача о дренируемой кайме пресных вод и ее приложения // Прикл. матем. и механика. – 1996. – Т. 60, Вып. 3. – С. 494–504.
12. Капранов Ю.И., Эмих В.Н. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными // Прикл. механика и техн. физика. – 2004. – Т. 45, № 5. – С. 79–93.
13. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.

14. Капранов Ю.И., Эмих В.Н. Приток нефти к горизонтальной скважине при наличии подошвенной воды // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – Т. 49, № 5. – С. 114–126.
15. Эмих В.Н. Фильтрация нефти к скважине при наличии в пласте иных жидкостей // Докл. РАН. – 2010. – Т. 435, № 2. – С. 199–204.
16. Bulirsch R. Numerical calculation of elliptic integrals and elliptic functions // Num. Math. – 1965. – Bd. 7, Н. 1.– S. 78–90; Н. 4. – S. 353–354; 1969. – Bd. 13, Н. 4. – S. 305–315.

Поступила в редакцию
19.04.11

Эмих Владимир Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор
Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск.
E-mail: *emikh@hydro.nsc.ru*